**Двойственность.**

В формулировке теоремы Куна-Таккера прямые и двойственные переменные (*x* и *λ*) входят симметричным образом, поэтому можно ожидать, что аналогичная симметрия существует и для задач оптимизации (относительно прямых и двойственных переменных). Действительно, рассмотрим функцию

,

Очевидно, что



⇒ исходная задача  (1)

может быть представлена в виде  (1-a)

Совершенно аналогично, введем функцию  и рассмотрим задачу

 (2)

*Задача (2) называется двойственной, а задача (1) или (1-а) – прямой.*

**Теорема**(двойственность). Справедливы следующие соотношения:

1) Для всех допустимых *x* и *λ* (т.е. *x*∈*X*, *λ*≥0)

 (3)

2) Если прямая задача регулярна, *x*\* – её решение, *λ*\* – множители Лагранжа, то *λ*\* – решение задачи (2) и справедливо

 (4)

3) Если для допустимых *x*\* и *λ*\* имеет место (4), то *x*\* – решение прямой задачи, а *λ*\* – решение двойственной задачи.

**Доказательство.**

1. Если *x*∈*X*, *λ* ≥ 0, то имеем:

, *ч.т.д.*

1. Пусть *x*\* – решение задачи (1), *λ*\* – множители Лагранжа, тогда

для ∀*λ* ≥ 0,

т.е. *λ*\* – решение (2), при этом, поскольку , то

, *ч.т.д.*

1. Пусть *x\**∈*X*, *λ\**≥ 0 и выполняется соотношение *ϕ*(*x*\*) = *ψ*(*λ\**), тогда рассмотрим произвольные допустимые *x*, *λ* ⇒ в силу (3) имеем



т.е. *x*\* – решение прямой задачи, *λ*\* – решение двойственной задачи, ч.т.д.

**Замечания.**

1. Можно свести задачу к другой с размерностью *m*, которая может оказаться при

*m* « *n* значительно проще.

1. Неравенство (3) позволяет получить оценку снизу для min в задаче (1) ⇒ можно оценить точность приближенного решения.

Все зависит от того, насколько просто можно вычислить 

**Двойственные задачи линейного программирования**

Рассмотрим задачу линейного программирования в основной форме:



Допустимое множество .

По теореме Куна-Таккера для задачи выпуклого программирования (а ЗЛП есть ЗВП) наличие оптимальной точки *x*\* эквивалентно наличию седловой точки (*x*\*,*λ*\*) функции Лагранжа:

, где



(*предполагаем, что условия регулярности выполняются*).

Если обозначить , то получаем *двойственную задачу*:

.

Построим двойственную задачу к исходной задаче линейного программирования, рассматривая её, *как задачу выпуклого программирования* (напомним, что там допустимое множество задается неравенством вида *fi*(*x*) ≤ 0).

Имеем (*m* + *n*)-ограничений:



Каждому ограничению сопоставим элементы *λi*, - компоненты вектора *λ* > 0.

Тогда функция Лагранжа:



Т.к. , то





Введем функцию *ψ*



Итак,

 

по условию 

Получаем *двойственную задачу линейного программирования*:

Целевая функция 

Допустимое множество: 

*При этом*:

* размерность исходной ЗЛП (*n*) совпадает с числом ограничений в двойственной: , и наоборот, число ограничений (*m*) в исходной ЗЛП совпадает с размерностью двойственной;
* min меняется на max, знаки неравенств меняются на противоположные.

*Справедливы следующие утверждения:*

1. *Двойственность взаимна*, т.е. задача, двойственная к двойственной – исходная.

Действительно,

рассмотрим задачу, эквивалентную двойственной:



⇒ получили ЗЛП в основной форме. Построим к ней двойственную:



⇒ эта задача эквивалентна исходной:

.

1. Если решение исходной задачи линейного программирования существует, то существует и решение двойственной ЗЛП, причем *экстремумы целевых функций совпадают* (было доказано в теореме о двойственности).
2. Экстремальная точка *λ*\* двойственной задачи является *векторным коэффициентом чувствительности* исходной задачи по вектору *b*.

Рассмотрим видоизмененную задачу с вектором правых частей *b*+Δ*b*:



Для пассивных ограничений  небольшое изменение *bi* не нарушит строгого неравенства.

При этом заметим, что из условия , которое называется условием дополняющей нежесткости, следует, что  для пассивных ограничений. Для активных ограничений  изменение *bi* может привести к большому изменению экстремума.

 *характеризует скорость изменения экстремума, т.е.* .

Действительно, для линейной задачи функция Лагранжа *L* имеет вид

, и, поскольку , имеем



Решение  двойственной задачи позволяет выделить ограничения, которые являются наиболее или наименее существенными для оптимума в прямой задаче, и проанализировать их влияние на результат оптимизации.

**Пример.**

Провести анализ чувствительности в следующей задаче оптимизации. Для изготовления изделий четырех видов  используют ресурсы трех типов, причем запасы ресурсов ограничены. Исходные данные задачи представлены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип ресурсов | Расход ресурсов на изготовление одного изделия  при его стоимости | | | | Запасы ресурсов |
| *A*1 | *A*2 | *A*3 | *A*4 |
| *c*=27 | *c*=10 | *c*=15 | *c*=28 |
| I | 3 | 2 | 1 | 2 | 20 |
| II | 3 | 1 | 3 | 4 | 50 |
| III | 2 | 1 | 1 | 2 | 60 |

*Цель*: составить план выпуска изделий , обеспечивающий max стоимость произведенной продукции.

Взяв в качестве управляемых переменных  – количество выпускаемых изделий , получим следующую математическую модель:



Решив задачу симплекс-методом, найдем: *x*\* = (0,0,10,5), т.е. max стоимость произведенной продукции *ϕ*\* = 290 будет получена, если изделия *A*1 и *A*2 не выпускать, а изготовить 10 изделий *A*3 и 5 изделий *A*4.

Двойственная задача имеет вид:



Решив её, получим *y*\* = (12,1,0), *ψ­*(*y*\*) = 290.

Из этого решения видно, что при небольших приращениях Δ*b*­1 запасов ресурса I максимально достижимая стоимость изготовленной продукции *ϕ*\* изменится на величину 12Δ*b*­1

Например, если этот ресурс представляет собой сырье, то увеличение его запасов на 1 кг при оптимальном планировании, вызовет возрастание стоимости изготовленной продукции на 12 рублей. То же приращение ресурсов II обеспечит увеличение объема продукции только на 1 рубль. И, наконец, изменение в небольших пределах запасов ресурса III вовсе не повлияет на стоимость произведенной продукции.

Это означает, что запасы ресурса III при оптимальном плане расходуются не полностью и являются избыточными.

⇒ Наиболее дефицитным в рассматриваемой задаче является ресурс I, его запасы следует по возможности, увеличивать в первую очередь. Второй ресурс менее дефицитен, а запасы ресурса III превосходят потребности, соответствующие оптимальному плану выпуска изделий.